REMPLACEMENT
Métropole - Réunion - Mayotte

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR AGRICOLE
TRAITEMENT DE DONNÉES

Toutes options

Durée : 180 minutes

Matériel autorisé : **Calculatrice**

Le sujet comporte 6 pages

Des extraits des tables de la loi normale et de la loi de Student sont fournis en fin de sujet.

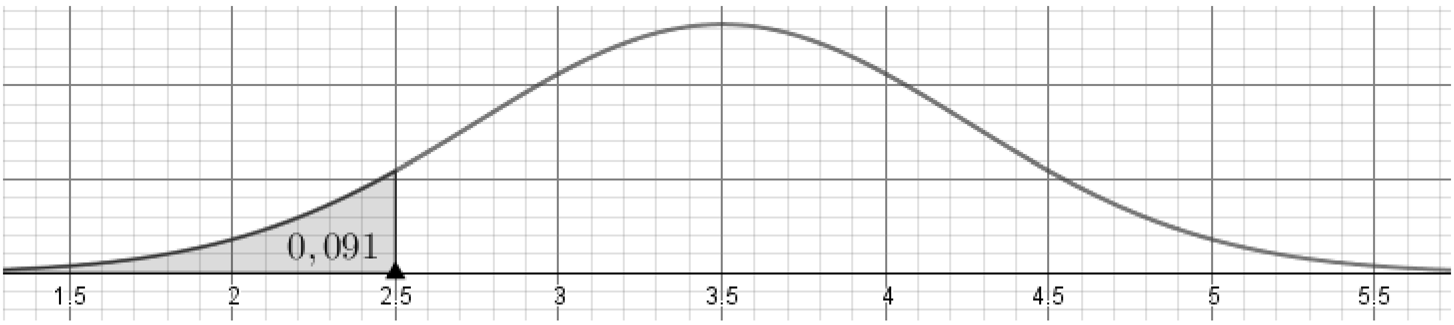
SUJET

Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

EXERCICE 1 (7 points)

Partie A

Une usine de conditionnement de saumon achète la production de saumon d'une ferme aquacole. Même si tous les saumons ont le même âge, leur masse varie selon les individus.
Pour cette espèce, la masse X, exprimée en kg, d'un saumon est une variable aléatoire normale d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ. La densité de la loi de X est représentée ci-dessous.



- Les saumons qui ont une masse inférieure à 2,5 kg sont utilisés pour des préparations culinaires.
- Les saumons qui ont une masse comprise entre 2,5 kg et 4,5 kg sont conditionnés en pavés.
- Les saumons qui ont une masse supérieure à 4,5 kg sont vendus en saumon fumé tranché sous vide.

1. À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
    a. Déterminer la masse moyenne des saumons de la production. Justifier votre réponse.
    b. On prend un saumon au hasard dans la production :
        - déterminer la probabilité qu'il soit utilisé pour des préparations culinaires ;
        - déterminer la probabilité qu'il soit conditionné en saumon fumé tranché.
    c. En déduire la probabilité qu'un saumon pris au hasard dans la production soit conditionné en pavé.

2. On admet dans la suite de l'exercice que la loi de X est la loi normale d'espérance $\mu = 3{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}75$. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 saumons prélevés à la livraison, associe la masse moyenne (exprimée en kg) des saumons de cet échantillon.
    a. Donner la loi de $\overline{X}$.
    b. Calculer la probabilité que $\overline{X}$ soit compris entre 3,35 kg et 3,65 kg.
    c. Calculer $P(\overline{X} \leq 3{,}30)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

L'usine doit fournir des produits conditionnés dont la masse attendue est de 3 kg, conformément à ce qui est écrit sur l'emballage du produit. Lors d'un contrôle qualité, on prélève un échantillon de 16 produits conditionnés.

On admet que cet échantillon est prélevé selon la méthode d'échantillonnage aléatoire simple avec remise. Les produits conditionnés sont pesés et les résultats exprimés en kg sont consignés dans le tableau suivant :

3,031	2,914	2,904	3,178	2,883	2,872	2,837	3,020
2,967	2,891	2,808	3,082	2,959	3,139	2,936	2,797

On admet que la variable aléatoire M désignant la masse (exprimée en kg) d'un produit conditionné est distribuée selon une loi normale.

1. Déterminer une estimation ponctuelle de la masse moyenne d'un produit conditionné dans cette usine.
2. Déterminer une estimation par intervalle de confiance de la masse moyenne d'un produit conditionné dans cette usine au niveau de confiance 0,95.
3. La masse du produit est-elle conforme à ce qui est écrit sur l'étiquette ? Justifier.

<u>EXERCICE 2</u> (5 points)

Dans la ferme aquacole, les saumons, en fin de croissance, sont très serrés dans leur bassin et peuvent se mordre entre eux. Une étude a montré qu'un saumon se vend mal lorsqu'il présente des marques de morsures.

On suppose que la probabilité qu'un saumon de ce bassin présente des marques de morsures est de 0,15.

<u>Partie A</u>

On prélève un échantillon de 20 saumons au hasard dans la production de cette ferme. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de saumons présentant des marques de morsures dans l'échantillon.

1. Donner, en justifiant, la loi suivie par X et ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait, dans cet échantillon :

a. « exactement 5 saumons avec des marques de morsures. »

b. « au moins 5 saumons ayant des marques de morsures. »

<u>Partie B</u>

L'année suivante, la ferme installe un bassin supplémentaire. Afin de connaître la proportion de saumons présentant des marques de morsures dans la nouvelle production, on prélève un échantillon de 100 saumons. On observe que la proportion f de saumons présentant des marques de morsures dans cet échantillon est égale à 10 %.

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion p de saumons présentant des marques de morsures dans la nouvelle production.

2. Estimer, par un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95, la proportion de saumons présentant des marques de morsures dans la nouvelle production.

3. Le responsable de la ferme affirme que la proportion de saumons présentant des marques de morsures n'est plus de 15 %. Justifiez de la pertinence ou non de cette affirmation.

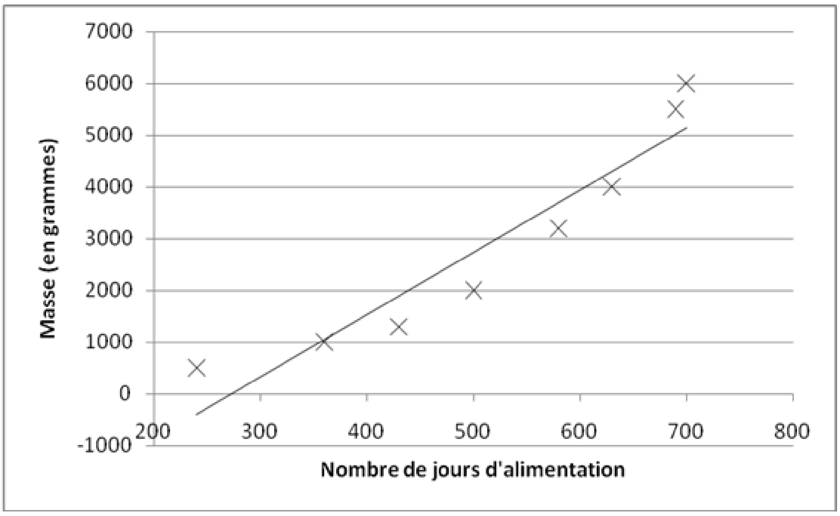
<u>EXERCICE 3</u> (8 points)

La Food and Drug Administration (FDA), l'agence américaine des denrées alimentaires et des médicaments, pourrait prochainement délivrer la première autorisation de commercialisation d'un animal transgénique à des fins alimentaires. Les poissons transgéniques adultes n'auraient pas une masse supérieure aux saumons non transgéniques de l'Atlantique, seule leur période de croissance serait nettement accélérée.

<u>Partie A</u> : le saumon transgénique

Une expérimentation visant à mesurer la croissance d'un saumon transgénique a permis d'obtenir, ci-dessous, les résultats et la représentation graphique avec l'ajustement affine du nuage de points.

i	Nombre de jours d'alimentation x_i	Masse en grammes y_i
1	240	500
2	360	1000
3	430	1300
4	500	2000
5	580	3200
6	630	4000
7	690	5500
8	700	6000



La variable statistique X désigne le nombre de jours d'alimentation et la variable statistique Y désigne la masse, exprimée en grammes, d'un saumon transgénique.

1. Expliquer pourquoi un ajustement affine n'est pas adapté.

On décide d'effectuer un ajustement exponentiel et on pose pour tout entier i variant de 1 à 8, $z_i = \ln y_i$.

2. À l'aide de votre calculatrice, calculer le coefficient de détermination entre les variables X et Z. Interprétez le résultat.
3. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression affine de Z en X. Les coefficients seront arrondis à 10^{-4} près.
4. En déduire une relation du type $y = k\,\mathrm{e}^{bx}$ avec k arrondi à 10^{-1} près.
5. Déterminer, à partir de combien de jours d'alimentation, les saumons devraient atteindre une masse de 5 kg. On arrondira la valeur à l'unité.

<u>Partie B</u> : le saumon non transgénique

Le modèle de croissance obtenu sur un saumon non transgénique est le suivant $y = 85{,}16\,\mathrm{e}^{0{,}004x}$ où x est le nombre de jours d'alimentation et y la masse en grammes d'un saumon non transgénique.
On suppose le modèle valide jusqu'à 1 200 jours d'alimentation.

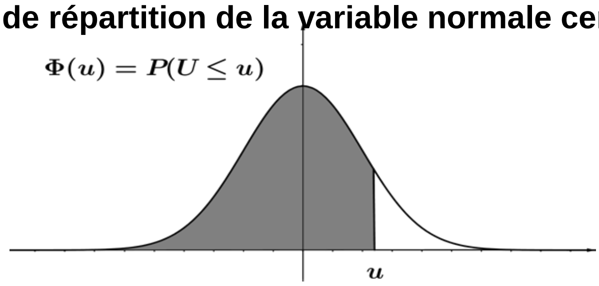
1. Estimer, avec ce modèle, la masse d'un saumon non transgénique après 500 jours d'alimentation.
2. Donner le nombre de jours d'alimentation au bout duquel le saumon non transgénique atteint une masse de 5 kg, arrondi à l'unité.

<u>Partie C</u> : comparaison des deux modes d'élevage

On souhaite comparer les deux modes d'élevage. En utilisant les questions précédentes, déterminer :

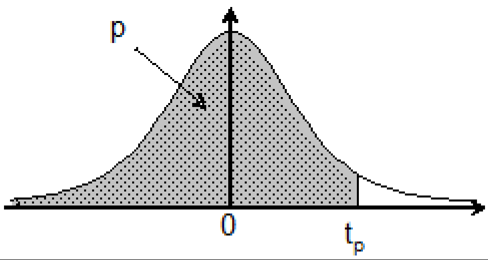
1. Une estimation du gain de masse après 500 jours d'alimentation entre les deux modes d'élevage.
2. Le gain de temps d'élevage pour atteindre une masse de 5 kg.
3. Commenter ces résultats.

Fonction de répartition de la variable normale centrée réduite



u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Fonction de répartition d'une variable de Student à k degrés de liberté
Valeurs de t_p telles que $Prob(T \leq t_p) = p$



k \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82